CONCOURS BLANC 1 ÉPREUVE 1 CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences

Exercice 1 : 39 points.

1. 2 points, 1 pour le calcul de A^2, 1 pour en déduire l'inverse.

2. 3 points, 1 pour traduire le calcul précédent sous forme de polynôme annulateur, 1 pour citer proprement le résultat sur le rapport entre les valeurs propres et les racines, 1 pour conclure.

3. 2 points, 1 pour non vide, 1 pour stable par combinaison linéaire. 0 point s'il y a la moindre confusion.

4. a. 2 points, c'est un calcul.

b. 2 points, 1 pour famille génératrice (il se peut que ce soit fait dans la question précédente), 1 pour famille libre.

5. a. 1 point, attention à être bien convaincant sur les relations de commutativité utilisées.

b. 2 points, un peu difficile, le mieux est d'écrire M et N comme combinaisons linéaires de I_2 et A.

6. 2 points, vraiment difficile.

7. a. 1 point, calcul simple basé sur $A^2 = -I_2$.

b. 2 points, dont 1 pour dire que la famille (I_2, A) est libre au bon moment.

8. a. 2 points, 1 pour utiliser l'hypothèse $\Delta \geqslant 0$, 1 pour conclure.

b. 2 points, 1 pour simplifier le système si $b \neq 0$, 1 pour conclure.

9. 1 point, il suffit de récapituler.

10. 1 point, question de cours.

11. 2 points, 1 pour le calcul, 1 pour la conclusion.

12. a. 4 points, 1 par colonne.

b. 4 points, 1 pour la diagonalisabilité (question de cours), 3 pour le spectre (c'est plus difficile).

c. 4 points, 2 pour chaque calcul.

Exercice 2 : 31 points.

1. 1 point, question de cours.

2. 2 points, 1 pour donner la condition selon laquelle il se passe quelque chose, et 1 pour dire ce qu'il se passe dans ce cas.

3. 3 points, 1 par ligne.

Date: 2 Décembre 2024 08h30-12h30.

http://louismerlin.fr.

4. 3 point, 2 points pour le programme, 1 pour la comparaison avec l'espérance de T_2, les cubes doivent citer la loi faible des grands nombres, pour les carrés, une explication vague suffit.
5. 1 point, aucune justification n'est demandée.
6. **a.** 1 point, aucune justification n'est demandée.
   b. 2 points, 1 pour citer l'indépendance quand il faut, 1 pour conclure.
   c. 3 points, 1 pour dire que les $\mathbb{P}((T_2 = k) \cap (X_1 = i))$ pour $i = 2, 3$ se calculent pareil, 1 pour utiliser correctement la formule des probas totales (et la citer), 1 pour conclure.
7. 2 points, calcul simple. -1 si on parle de la somme infinie avant d'avoir justifié de son existence.
8. 3 points, 1 pour la loi, 1 pour l'espérance de T_2, 1 pour sa variance.
9. **a.** 1 point, c'est la modélisation.
   b. 3 points, 1 pour l'espérance, 1 pour la variance (questions de cours), 1 pour la vérification pour $i = 1$.
10. 1 point, la réponse est contenue dans la question.
11. **a.** 1 point, c'est l'indépendance.
    b. 2 points, calcul classique qui utilise la formule des probas totales.
    c. 1 point, question de conclusion puisque $T_3 = 1 + Z_2 + Z_3$.
12. 1 point, c'est la linéarité de l'espérance.
13. 2 points, question difficile.

Exercice 3 : 22 points.

1. 3 points, dont 1 pour justifier de la légalité du changement de variables.
2. **a.** 3 points, 1 pour f est $\mathcal{C}^1$, 1 pour citer le théorème fondamental de l'analyse au moins une fois, 1 pour la conclusion.
   b. 2 points, 1 pour le TFA.
   c. 3 points, 1 pour l'équation caractéristique, 1 pour la résolution de l'équation différentielle, 1 pour que les solutions soient correctement présentées (comme un ensemble de fonctions).
   d. 4 points, 1 pour $f(0)$, 1 pour $f'(0)$, 2 pour résoudre le système associé.
3. 3 points, 1 pour avoir compris qu'on ne raisonnait pas par équivalence, 2 pour le calcul.
4. 4 points, à moduler

Orthographe, Lisibilité, présentation : 5 points.

Total : 100 points. divisés par 4 pour faire une note sur 20.

Commentaires / erreurs fréquentes

Stratégie.

- La barème a vu l'apparition des points de présentation. Ce sera la cas dans tous les sujets jusqu'à la fin de l'année, y compris aux sujets de concours eux-mêmes.
- Des problèmes récurrents de gestion du temps. Le dernier exercice a été très peu touché. Certes le début était difficile mais la question **2.b** permettait de se relancer.
- Les deux autres exercices étaient construits de manières très classiques avec des points faciles à prendre en début de grandes parties. Dommage de rater la question **9.a** de l'exercice 2 par exemple, ou la question **10** de l'exercice 1.
- L'exercice d'algèbre linéaire donne lieu à de grandes confusions dans les énoncés de cours (qu'il est urgent d'apprendre avec plus de rigueur). Plein d'énoncés complètement inventés ont été invoqués pour justifier qu'une matrice est ou n'est pas diagonalisable, ou pour en trouver le spectre. Un énoncé qui n'est pas dans le cours est soit faux, soit hors programme et dans les cas il est inutilisable.

- Le cours de probabilités sur les variables discrètes n'est toujours pas connu non plus, alors que j'insiste depuis des mois.
- Les étudiants qui ont encore des problèmes de langage, qui confondent inclusion et appartenance, union et intersection, sous-espace vectoriel et famille qui l'engendre, variable aléatoire et événement doivent s'en préoccuper au plus vite. C'est l'enjeu principal de ce cours que de manipuler les objets mathématiques avec un peu de recul.

Exercice 1.

- C'est de loin l'exercice où le plus de points ont été pris.
- Le calcul de A^2 s'est bien passé mais peu de gens repère a priori que $A^2 = -I_2$.
- La matrice A est une matrice du cours dont nous avions déjà montré que le spectre était vide.
- Plein d'énoncés farfelus ont été utilisés à tort pour justifier que A était ou n'était pas diagonalisable. On rappelle que A n'est pas diagonale, et qu'elle n'est pas symétrique. Parmi les nombreux énoncés faux et à oublier immédiatement, il y en a un qui revient souvent : "A n'est pas symétrique donc n'est pas diagonalisable". J'avais pourtant lourdement insisté sur le fait que l'énoncé correct est la réciproque : "Si A est symétrique, alors A est diagonalisable", mais bien sûr pas celui-ci. Un sens sens n'est vrai.
- Plusieurs questions ont donné lieu à du calcul "en coordonnées", en posant par exemple $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il est préférable de n'utiliser ce genre de méthode qu'en dernier recours, après avoir essayé d'exploiter des arguments plus abstraits qui sont en général plus efficace.
- Si P est polynôme, par exemple de degré 2 comme c'était le cas ici, $P(x) = x^2 + ux + v$, ce polynôme s'évalue en une matrice de la manière suivante
$$P(A) = A^2 + uA + v{\color{red}I_2}.$$
Oublier le I_2 est pénalisé : on ne peut pas ajouter une matrice et un nombre réel.
- Les deux premiers chapitres d'algèbre linéaire ont malheureusement été un peu oubliés. J'ai noté de grosses confusions entre "être stable par combinaisons linéaires" qui est une des caractéristique d'un sous-espace vectoriel et "être linéaire" qui s'emploie pour une application. À revoir donc !
- L'enjeu de la Partie B a été souvent mal compris. Affirmer qu'il existe des solutions à l'équation $P(x) = 0$ lorsque $\Delta \geqslant 0$ ne sert pas à grand chose puisque on cherchait une solution matricielle.
- La question **12.b** sur la recherche du spectre de B n'a jamais donné lieu à une réponse satisfaisante. Affirmer que les valeurs propres d'une matrice se trouvent sur la diagonale est grossièrement faux. Et d'ailleurs, la matrice B est elle-même un contre-exemple ! !

Exercice 2.

- Encore des erreurs dans le repérage de variables aléatoires grâce à la modélisation.
- Encore des erreurs dans l'utilisation de l'indépendance et de l'incompatibilité. Je rappelle que la probabilité de l'intersection de deux événements indépendants est le produit des probabilités, la probabilité de la réunion d'événements incompatibles est la somme des probabilités.
- Encore des erreurs dans le calcul de sommes géométriques dérivées. Pourquoi ne pas commencer par ces choses simples et s'assurer de prendre les points, c'est extrêmement rentable.
- Utiliser convenablement la formule des probabilités totales demande de citer le système complet d'événements utilisés.
- La partie C de cet exercice était plus difficile.

Exercice 3.

- L'exercice a été très peu touché. C'est une erreur de stratégie de ne pas y consacrer un minimum de temps, au moins 30 minutes.
- Faire un changement de variables rigoureusement demande de vérifier que l'expression de u en fonction de t est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Je rappelle que dans les exigences du programme de ECG, les changements de variables affines sont à l'initiative de l'étudiant mais que tout changement de variable plus compliqué doit faire l'objet d'une indication. Et donc, s'il n'y a pas d'indication... c'est que le changement de variables est affine ! Une fonction affine est toujours de classe $\mathcal{C}^1$, c'est évident mais il faut penser à le dire.
- Certes, ce n'est pas la partie du programme de 1ère année la plus fraîche, mais personne ne sait résoudre correctement une équation différentielle simple. La fin de l'exercice peut être considéré comme un exercice très facile (le début est plus délicat).

Correction détaillée.

On trouve les corrections des deux premiers exercices à cette adresse : https://louismerlin.fr/FTP/EML24cor.pdf. C'est le concepteur lui-même qui a écrit ce corrigé. Et on trouve une correction de l'exercice 3 à cette adresse https://louismerlin.fr/FTP/EDHEC24cor.pdf